数理解析研究所講究録 第2086巻 2018年 45-58

第二固有値を固定したときの正則二部グラフの頂点数の最大化

愛知教育大学・数学教育講座　野崎寛
Hiroshi Nozaki
Department of Mathematics Education,
Aichi University of Education

1　はじめに

連結な次数 k の正則グラフ G に対して, その最大固有値 k と第 2 固有値（二番目に大きな固有値）の差をスペクトルギャップという. スペクトルギャップが大きいグラフは, ある意味で良い連結性を持つことが知られている. 次数 k と第 2 固有値を固定したときに, 頂点数ができるだけ大きいグラフを得ることがここでの問題である. 本稿では, 対象となるグラフを正則二部グラフに制限し, 次数 k と第 2 固有値を固定したときの頂点数に対する上界を与え, その上界を達成するようなグラフの特徴付け, 分類に関する結果を紹介する. 本研究は, S.M. Cioabă 氏と J.H. Koolen 氏との共同研究によるものである.

単純グラフ $G=(V,E)$ の隣接行列 $\boldsymbol{A}$ とは, V により添字付けられる正方行列で, その (u,v) 成分 $A(u,v)$ が,

$$\boldsymbol{A}(u,v)=\begin{cases}1, & \{u,v\}\in E,\\ 0, & \{u,v\}\notin E\end{cases}$$

で定義される行列である. 隣接行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を, グラフ G の固有値という. G の異なる固有値を大きいものから順に $\lambda_1=k,\lambda_2,\dots,\lambda_r$ と表すことにする. G のスペクトルギャップは, G の最大固有値 k と第 2 固有値 λ_2 の差 $\tau(G)=k-\lambda_2$ で定義される. 頂点集合 V の部分集合 S に対して, S の辺境界 ∂S を

$$\partial S=|\{\{u,v\}\mid u\in S, v\in V\setminus S, \{u,v\}\in E\}|$$

と定義する. そのとき, 等周定数 $h(G)$ は

$$h(G)=\min_{S\subset V,|S|\le|V|/2}\frac{|\partial S|}{|S|}$$

で定義される値である. 大きい等周定数 $h(G)$ をもつグラフは, どのような部分集合 S を取ってきたとしても, S と $V\setminus S$ の間に一定の辺の本数が確保できるという意味で, よい連結性をもつということが出来る. $h(G)$ は Cheeger 型の不等式

$$\tau(G)/2\le h(G)\le\sqrt{2k\tau(G)}$$

により, $\tau(G)$ で評価できる [2]. 特に, 下界に注目すれば, $\tau(G)$ が大きいグラフは, $h(G)$ が大きくなり, よい連結性を持つと言うことができる. 次数 k と $0 \leq \lambda < 2\sqrt{k-1}$ を満たす実数 λ を固定したとき, $\lambda_2 \leq \lambda$ を満たすグラフは有限個しかないことが知られており (Alon–Boppana, Serre), 最大の頂点数 $v(k,\lambda)$ をもつグラフの決定, 分類がここでの問題である.

先行研究である [4] では, 次のような上界を得ている. 実数 $c \geq 1$, 2 つの整数 $k \geq 3$, $t \geq 3$ に対して, 行列 $\boldsymbol{T}$ は

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(k,t,c) = \begin{pmatrix} 0 & k & & & & \\ 1 & 0 & k-1 & & & \\ & 1 & 0 & k-1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & k-1 \\ & & & & c & k-c \end{pmatrix}$$

で定義される t 次の 3 重対角行列であるとする.

Theorem 1.1. λ を行列 $\boldsymbol{T}$ の 2 番目に大きい固有値とする. そのとき,

$$v(k,\lambda) \leq 1 + \sum_{i=0}^{t-3} k(k-1)^i + \frac{k(k-1)^{t-2}}{c}$$

が成り立つ. 等号を達成する必要十分条件は, グラフが $\boldsymbol{T}(k,t,c)$ を交叉行列（intersection matrix）に持つ距離正則グラフであることである.

$\boldsymbol{T}$ を交叉行列を持つ距離正則グラフは, 直径 d, 内周 g とすると, $g \geq 2d-1$ を満たす正則グラフであると特徴づけられる [1]. また, $\boldsymbol{T}(k,t,c)$ を交叉行列に持つ距離正則グラフは, その直径が 6 より大きいとき, 存在しないことが知られている [5].

本稿では, グラフを正則二部グラフに制限し, Theorem 1.1 の上界の類似を紹介する. その上界を達成するグラフは, 距離正則グラフとなり, $g \geq 2d-2$ を満たす正則二部グラフと特徴づけられる. そのような距離正則グラフについては, [5] のような大きな直径に対する非存在定理は知られていないが, [6] の手法を用いることで, $d > 26$ のとき存在しないことを示すことができる.

2　正則二部グラフの頂点数に対する上界

G を k-正則二部グラフとし, その第二固有値を λ_2 する. 次数 k と $0 \leq \lambda < 2\sqrt{k-1}$ を満たす実数 λ を固定したとき, $\lambda_2 \leq \lambda$ を満たすグラフの頂点数の最大値を $b(k,\lambda)$ とする. この節では, $b(k,\lambda)$ の Theorem 1.1 の類似に相当する上界を紹介する.

$F_i^{(k)}(x)$ を次の 3 項間漸化式で定義される一変数多項式とする.

$$F_0^{(k)}(x) = 1, \qquad F_1^{(k)}(x) = x, \qquad F_2^{(k)}(x) = x^2 - k,$$

$$xF_{i-1}^{(k)}(x) = F_i^{(k)}(x) - (k-1)F_{i-2}^{(k)}(x) \qquad (i \geq 3).$$

また, 一変数多項式 $\mathscr{F}_i(x)$ を

$$\mathscr{F}_i(x) = F_{2i}(\sqrt{x})$$

で定義する. $\boldsymbol{A}$ を次数 k の正則二部グラフ G の隣接行列であるとすると,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} O & \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{N}^\top & O \end{pmatrix}$$

と表すことが出来る. このとき, 行列 $\mathscr{F}_i(\boldsymbol{N}\boldsymbol{N}^\top)$ は非負行列（成分が全て非負）であることが分かる. この非負であるという性質が本質的に働いて, 次の正則二部グラフに関する線形計画限界を得ることが出来る.

Theorem 2.1. $G = (V, E)$ を連結な次数 k の正則二部グラフとし, G の異なる固有値を $\pm\lambda_1 = \pm k, \pm\lambda_2, \ldots, \pm\lambda_r$ とする. 次の (1), (2) を満たす一変数多項式 $f(x) = \sum_{i=0}^{s} f_i \mathscr{F}_i^{(k)}(x)$ が存在したとする.

(1) $f(k^2) > 0$ であり, 任意の $i = 2, \ldots, r$ に対して, $f(\lambda_i^2) \leq 0$ が成り立つ.

(2) $f_0 > 0$ であり, 任意の $i = 1, \ldots, s$ に対して, $f_i \geq 0$ が成り立つ.

そのとき,

$$|V| \leq \frac{2f(k^2)}{f_0}$$

が成り立つ.

2 つの整数 $k \geq 3$, $t \geq 3$ と, $1 \leq c \leq k$ を満たす実数 c に対して, 行列 $\boldsymbol{B}$ を

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(k,t,c) = \begin{pmatrix} 0 & k & & & & \\ 1 & 0 & k-1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 0 & k-1 & \\ & & & c & 0 & k-c \\ & & & & k & 0 \end{pmatrix}$$

で定義される t 次の 3 重対角行列とする. Theorem 2.1 の上界が有効にはたらき, Theorem 1.1 の類似として次の定理を得ることが出来る.

Theorem 2.2. λ を行列 $\boldsymbol{B}$ の 2 番目に大きい固有値であるとする. そのとき,

$$b(k,\lambda) \leq 2\left(\sum_{i=0}^{t-4}(k-1)^i + \frac{(k-1)^{t-3}}{c} + \frac{(k-1)^{t-2}}{c}\right)$$

が成り立つ. 等号を達成する必要十分条件は, グラフが $\boldsymbol{B}(k,t,c)$ を交叉行列に持つ距離正則グラフになることである.

Table 1: Known bipartite graphs meeting the bound $M(k,d+1,c)$

k	λ	$b(k,\lambda)$	d	c	Name
2	$2\cos(2\pi/n)$	n (even)	$n/2$	1	n-cycle C_n
k	0	$2k$	2	1	Complete bipartite graph $K_{k,k}$
k	$\sqrt{k-\tau}$	$2(1+k(k-1)/\tau)$	3	τ	Symmetric (v,k,τ)-design
r^2-r+1	r	$2(r^2+1)\times$ (r^2-r+1)	4	$(r-1)^2$	$pg(r^2-r+1,r^2-r+1,(r-1)^2)$
q	$\sqrt{q}$	$2q^2$	4	$q-1$	$AG(2,q)$ minus a parallel class
$q+1$	$\sqrt{2q}$	$2\sum_{i=0}^{3}q^i$	4	1	$GQ(q,q)$
$q+1$	$\sqrt{3q}$	$2\sum_{i=0}^{5}q^i$	6	1	$GH(q,q)$
6	2	162	4	2	$pg(6,6,2)$

$AG(2,q)$: affine plane, $GQ(q,q)$: generalized quadrangle, $GH(q,q)$: generalized hexagon, pg: partial geometry, q: prime power, r: power of 2,
We use the bipartite incidence graph of an incidence structure.

$\boldsymbol{B}(k,t,c)$ を交叉行列に持つ距離正則グラフはその内周を g, 直径を d とするとき, $g\geq 2d-2$ を満たす正則二部グラフだと特徴づけられる [1]. Table 1が, 知られている $g\geq 2d-2$ を満たす k-正則二部グラフである.

Theorem 2.2 において, λ がどのような値を取り得るかを考える. 一変数多項式 $G_i(x)$ を $G_i(x)=\sum_{j=0}^{\lfloor i/2\rfloor}F_{i-2j}(x)$ で定める. $G_i(x)$ は三項間漸化式

$$G_i(x)=xG_{i-1}(x)-(k-1)G_{i-2}(x)(i\geq 2) \tag{2.1}$$

を満たしており, $w(x)=\sqrt{4(k-1)-x^2}$ を重み関数とする, 区間 $[-2\sqrt{k-1},2\sqrt{k-1}]$ における直交多項式系になる. $\lambda^{(j)}$ を $G_j(x)$ の最大の根とする. 直交多項式系の性質から, 任意の j に対して, $\lambda^{(j)}<\lambda^{(j+1)}<2\sqrt{k-1}$ であり, 実際, $\bigcup_{j=1}^{\infty}(\lambda^{(j)},\lambda^{(j+1)}]=(0,2\sqrt{k-1})$ となる. Theorem 2.2 において, λ を先に定めれば, t は, $\lambda^{(t-3)}<\lambda\leq\lambda^{(t-2)}$ を満たすものとして与えられ, c は $c=-F_{t-2}(\lambda)/G_{t-4}(\lambda)$ と与えられる. これらの c, t に対して, 行列 $\boldsymbol{B}(k,t,c)$ の第二固有値は先に選んだ λ となる.

3 上界を達成する距離正則グラフ

本節では, [6] の手法に基づき, 内周 g, 直径 d の距離正則二部グラフ Γ が $g\geq 2d-2$ を満たすとき, $d\leq 26$ であることの証明を与える. 現在, 執筆中の本結果を掲載する論文については, 詳細な計算などは省略する予定であるため, そこには載せる予定のない詳細な計算をここに記すことにする.

$x=(s+1/s)\sqrt{k-1}$ とし, 多項式 $G_i(x)$ を s の式で表す. 2 次正方行列 $\boldsymbol{S}$ を

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix} x & 1\\ -(k-1) & 0\end{pmatrix}$$

で定義する．$G_i(x)$ の三項間漸化式 (2.1) により，

$$(G_i, G_{i-1}) = (G_{i-1}, G_{i-2})\boldsymbol{S} = \cdots = (G_1, G_0)\boldsymbol{S}^{i-1} = (x, 1)\boldsymbol{S}^{i-1} = (1, 0)\boldsymbol{S}^{i}$$

を得る．$\boldsymbol{S}$ の固有値を $\mu_i(i \in \{1, 2\})$ とすれば，$(\mu_i, 1)$ は μ_i の固有ベクトルとなる．

$$(1, 0) = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\big((\mu_1, 1) - (\mu_2, 1)\big)$$

であるから，

$$(G_i, G_{i-1}) = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\big((\mu_1, 1) - (\mu_2, 1)\big)\boldsymbol{S}^i = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\big((\mu_1, 1)\mu_1^i - (\mu_2, 1)\mu_2^i\big)$$

と変形でき，

$$G_i = \frac{\mu_1^{i+1} - \mu_2^{i+1}}{\mu_1 - \mu_2} \tag{3.1}$$

となる．$\mu_1 + \mu_2 = x$, $\mu_1\mu_2 = k - 1$ であるから，$\mu_1 = s\sqrt{k-1}$, $\mu_2 = (1/s)\sqrt{k-1}$ とすれば，$x = (s + 1/s)\sqrt{k-1}$ となる．実際には，$s = (x + \sqrt{x^2 - 4(k-1)})/(2\sqrt{k-1})$ で与えられる．(3.1) に，$\mu_1 = s\sqrt{k-1}$, $\mu_2 = (1/s)\sqrt{k-1}$ を代入すれば，

$$G_i(x) = \frac{\sqrt{(k-1)^i}}{s^i(s^2-1)}(s^{2i+2} - 1) \tag{3.2}$$

を得る．

$\boldsymbol{B}(k, d+1, c)$ の固有多項式は，$(x^2 - k^2)\big((c-1)G_{d-3}(x) + G_{d-1}(x)\big)$ であり，(3.2) を使えば，

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_d(x) &= (c-1)G_{d-3}(x) + G_{d-1}(x)\\ &= \frac{\sqrt{(k-1)^{d-1}}}{s^{d-1}(s^2-1)}\Big(s^{2d} + \frac{c-1}{k-1}s^{2d-2} - \frac{c-1}{k-1}s^2 - 1\Big)\end{aligned} \tag{3.3}$$

となる．グラフ Γ の隣接行列 $\boldsymbol{A}$ の最小多項式は，$(x^2 - k^2)\mathscr{S}_d(x)$ である．$\boldsymbol{A}$ の $\pm k$ でない固有値を θ とし，その重複度を m_θ とする．そのとき，n をグラフの頂点数とすれば，$\boldsymbol{B}(k, d+1, c)$ の成分のみの情報から，

$$m_\theta = \frac{nck(k-c)(k-1)^{d-2}}{(k-\theta)f_d'(\theta)f_{d-1}(\theta)},$$

が得られる [3, 3.1 節 (1.5) 式]. ここで, 多項式 $f_i(x)$ は,

$$
\begin{aligned}
f_0(x) &= 1, \qquad f_1(x) = x+1 = F_0(x)+F_1(x),\\
f_i(x) &= xf_{i-1}-(k-1)f_{i-2} = \sum_{j=0}^{i} F_j(x) \text{ for } i=1,\dots,d-2,\\
f_{d-1}(x) &= (x+c-1)f_{d-2}(x)-(k-1)f_{d-3}(x)\\
&= (x+c-1)\sum_{j=0}^{d-2}F_j(x)-(k-1)\sum_{j=0}^{d-3}F_j(x)\\
&= (x+c-1)G_{d-2}(x)+(x+c-k)G_{d-3}(x)-(k-1)G_{d-4}(x)\ (G_{-1}=0), \qquad (3.4)\\
f_d(x) &= (x+k-c)f_{d-1}(x)-c(k-c)f_{d-2}\\
&= (x+k-c)(\sum_{j=0}^{d-1}F_j(x)+(c-1)\sum_{j=0}^{d-2}F_j(x))-c(k-c)\sum_{j=0}^{d-2}F_j(x)\\
&= (x+k)\big((c-1)G_{d-3}(x)+G_{d-1}(x)\big) = (x+k)\mathscr{S}_d(x). \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

また,

$$
f_d'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_d(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((x+k)\mathscr{S}_d(x)\big) = \mathscr{S}_d(x)+(x+k)\mathscr{S}_d'(x)
$$

であり, $\mathscr{S}_d(\theta)=0$ であることに注意すれば, $f_d'(\theta)=(\theta+k)\mathscr{S}_d'(\theta)$ となる. したがって,

$$
m_\theta = \frac{nck(k-c)(k-1)^{d-2}}{(k^2-\theta^2)\mathscr{S}_d'(\theta)f_{d-1}(\theta)} \tag{3.6}
$$

を得る.

$x=\theta=(\tau+1/\tau)\sqrt{k-1}$ として, $\mathscr{S}_d(\theta)=0$ であるから, (3.3) より,

$$
\tau^{2d}+\frac{c-1}{k-1}\tau^{2d-2}-\frac{c-1}{k-1}\tau^2-1=0,
$$

$$
\tau^{2d-2} = \frac{(c-1)\tau^2+k-1}{(k-1)\tau^2+c-1} \tag{3.7}
$$

となる. (3.4) に $x=\theta=(\tau+1/\tau)\sqrt{k-1}$ と (3.2) を代入し, (3.7) を用いて整理すれば,

$$
f_{d-1}(\theta) = -\frac{c(k-c)\sqrt{(k-1)^{d-2}}}{\tau^{d-2}((k-1)\tau^2+c-1)} \tag{3.8}
$$

となる.

$$
\begin{aligned}
h_1(s) &= \frac{\sqrt{(k-1)^{d-1}}}{s^{d-1}(s^2-1)},\\
h_2(s) &= s^{2d}+\frac{c-1}{k-1}s^{2d-2}-\frac{c-1}{k-1}s^2-1,\\
\mathscr{S}_d(s) &= h_1(s)h_2(s)
\end{aligned}
$$

として,

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{S}_d(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\mathscr{S}_d(s)}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=(h_1'(s)h_2(s)+h_1(s)h_2'(s))\frac{s^2}{\sqrt{k-1}(s^2-1)}.$$

$h_2(\tau)=0$ であることに注意すれば,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathscr{S}_d(\theta)}{\mathrm{d}x}&=h_1(\tau)h_2'(\tau)\frac{\tau^2}{\sqrt{k-1}(\tau^2-1)}\\&=\frac{\sqrt{(k-1)^{d-2}}}{\tau^{d-4}(\tau^2-1)^2}\Big(2d\tau^{2d-2}+(2d-2)\frac{c-1}{k-1}\tau^{2d-4}-2\frac{c-1}{k-1}\Big).\end{aligned}$$

(3.7) を用いて整理すれば,

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{S}_d(\theta)}{\mathrm{d}x}=\frac{2\sqrt{(k-1)^{d-4}}}{\tau^{d-2}(\tau^2-1)^2}\cdot\frac{(d-1)(k-1)(c-1)(\tau^4+1)+\big(d(k-1)^2+(d-2)(c-1)^2\big)\tau^2}{(k-1)\tau^2+c-1}. \tag{3.9}$$

(3.8), (3.9) を (3.6) に代入して (3.7) を用いて整理すれば,

$$\begin{aligned}m_\theta&=\frac{nk(k-1)(\tau^2-1)^2\big((c-1)\tau^2+k-1\big)\big((k-1)\tau^2+c-1\big)}{2(\theta^2-k^2)\tau^2[(d-1)(k-1)(c-1)(\tau^4+1)+\big(d(k-1)^2+(d-2)(c-1)^2\big)\tau^2]}\\&=\frac{nk(k-1)(\tau-1/\tau)^2\big((c-1)\tau+(k-1)/\tau\big)\big((k-1)\tau+(c-1)/\tau\big)}{2(\theta^2-k^2)[(d-1)(k-1)(c-1)(\tau^2+1/\tau^2)+d(k-1)^2+(d-2)(c-1)^2]}\end{aligned} \tag{3.10}$$

となる．(3.10) は, τ と $1/\tau$ に関する対称式であるから, $\tau+1/\tau=\theta/\sqrt{k-1}$ と $\tau(1/\tau)=1$ で表すことが出来る．実際,

$$m_\theta=\frac{nk\big(\theta^2-4(k-1)\big)\big((c-1)\theta^2+(k-c)^2\big)}{2(\theta^2-k^2)[(d-1)(c-1)\theta^2+d(k-c)^2+2(c-1)(k-c)]}$$

と表せる．$\theta^2=(k-1)\phi$ とすると,

$$m_\theta=\frac{nk(k-1)\big(\phi-4\big)\big((c-1)(k-1)\phi+(k-c)^2\big)}{2\big((k-1)\phi-k^2\big)[(d-1)(c-1)(k-1)\phi+d(k-c)^2+2(c-1)(k-c)]}$$

となる．これは, ϕ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式の次数が高々2 であることを意味している．ϵ を, d が偶数のとき $\epsilon=1$ であり, d が奇数のとき $\epsilon=0$ であると定義する．$\mathscr{S}_d(x)/x^\epsilon$ は, $\mathbb{Q}$ 上の x^2 に関する多項式である．$\mathscr{S}_d(x)/x^\epsilon$ の x^2 に関する多項式としての根 $x^2=(k-1)\phi$ の最小多項式の次数が高々2 であることから, $\mathscr{S}_d(x)/x^\epsilon$ は次数が高々2 の既約多項式に因数分解されるはずである．

$\mathscr{S}_d(x)$ をある整数係数多項式に変形することを考える．まず, 次の多項式 $H_d(x)$ を考える．

$$H_d(x)=\frac{\mathscr{S}_d(x)}{x^\epsilon\sqrt{(k-1)^{d-3-\epsilon}}}.$$

$z = x^2/(k-1)$, $u = s^2$ とすれば, $z = (s+1/s)^2 = u + 1/u + 2$ と表せる. $d = 2m+1-\epsilon$ とし, (3.2) に注意すれば,

$$\begin{aligned}
H_d(x) &= \frac{(c-1)G_{d-3}(x) + G_{d-1}(x)}{x^\epsilon \sqrt{(k-1)^{d-3-\epsilon}}} \\
&= \Big(\frac{s}{s^2+1}\Big)^\epsilon \Big((c-1)\frac{s^{2d-4}-1}{s^{d-3}(s^2-1)} + (k-1)\frac{s^{2d}-1}{s^{d-1}(s^2-1)}\Big) \\
&= \frac{1}{(s^2+1)^\epsilon}\Big((c-1)\frac{s^{4m-2-2\epsilon}-1}{s^{2m-2-2\epsilon}(s^2-1)} + (k-1)\frac{s^{4m+2-2\epsilon}-1}{s^{2m-2\epsilon}(s^2-1)}\Big) \\
&= \frac{1}{(u+1)^\epsilon}\Big((c-1)\frac{u^{2m-1-\epsilon}-1}{u^{m-1-\epsilon}(u-1)} + (k-1)\frac{u^{2m+1-\epsilon}-1}{u^{m-\epsilon}(u-1)}\Big)
\end{aligned}$$

ここで,

$$P_{i,\epsilon}(u) = \frac{u^{2i+1-\epsilon}-1}{u^{i-\epsilon}(u+1)^\epsilon(u-1)}$$

とする. $P_{i,\epsilon}(u)$ は u, $1/u$ に関する対称式であり, z の有理数係数多項式として表すことが出来る.

$$H_{2m+1-\epsilon}(z) = (c-1)P_{m-1,\epsilon}(z) + (k-1)P_{m,\epsilon}(z),$$

と表せるから, $H_d(z)$ も z の有理数係数多項式である. また,

$$P_{i,\epsilon}(z) = (z-2)P_{i-1,\epsilon}(z) - P_{i-2,\epsilon}(z)$$

が成り立つことと, $P_{0,\epsilon} = \epsilon$, $P_{1,0} = z-1$, $P_{1,1} = 1$ より, $P_{i,\epsilon}(z)$ は z のモニックな整数係数多項式であることが分かる. したがって, $H_d(z)$ も z の整数係数多項式であることが分かった. $H_d(z)$ の根 $z = \phi$ は, 高々2次の最小多項式を持つことから, $H_d(z)$ は高々2次の既約多項式に因数分解されることが分かる. $H_d(z)$ が整数係数多項式であることから, これを $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ または $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 上の多項式として見て, 因数に現れる既約多項式の次数から矛盾を導くことが, グラフの非存在を示すアイデアとなる. Table 2 に後で使う $P_{m,\epsilon}(z)$ に関連する等式を並べておく.

$d = 2m+1-\epsilon$
$P_{m,\epsilon}(z) = (u^d-1)/u^{m-\epsilon}(u-1)(u+1)^\epsilon$
$P_{m-1,\epsilon}(z) = (u^{d-2}-1)/u^{m-1-\epsilon}(u-1)(u+1)^\epsilon$
$P_{m-1,\epsilon}(z) + P_{m,\epsilon}(z) = (u+1)^{1-\epsilon}(u^{d-1}-1)/u^{m-\epsilon}(u-1)$
$-P_{m-1,\epsilon}(z) + P_{m,\epsilon}(z) = (u^{d-1}+1)/u^{m-\epsilon}(u+1)^\epsilon$

Table 2: Identities involving $P_{i,\epsilon}(z)$

3.1 $H_d(z)$ modulo 2

$c' = c-1$, $k' = k-1$ とする．$H_d(z)$ を c' と k' の最大公約数で割ったものを $\hat{H}_d(z)$ とする．自然数 n, a に対して, a と互いに素な自然数 b を用いて, $a = n^s b$ となるような最大の s を $\mathrm{ord}_n(a)$ と表す．$\mathrm{ord}_n(0) = \infty$ とする．$\hat{H}_d(z)$ modulo 2 に対しては, Table 3 にあげる A–C の場合がある．

Cases	Conditions	$\hat{H}_d(z) \pmod 2$	d
A	$\mathrm{ord}_2(c') > \mathrm{ord}_2(k')$	$P_{m,\epsilon}(z)$	$d = 2^r w$
B	$\mathrm{ord}_2(c') < \mathrm{ord}_2(k')$	$P_{m-1,\epsilon}(z)$	$d-2 = 2^r w$
C	$\mathrm{ord}_2(c') = \mathrm{ord}_2(k')$	$P_{m-1,\epsilon}(z) + P_{m,\epsilon}(z)$	$d-1 = 2^r w$

Table 3: $\hat{H}_d(z)$ modulo 2, $w \in \{1,3,5\}$

$\hat{H}_d(z)$ の根の最小多項式は高々2次であるから, $\hat{H}_d(z)$ は Table 4 に示される $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上の既約多項式のみが因数として現れ得る．

$f(z)$	$z = u + 1/u + 2$	order of u
z	$(u+1)^2/u$	1
$z+1$	$(u^2+u+1)/u$	3
z^2+z+1	$(u^4+u^3+u^2+u+1)/u^2$	5

Table 4: Irreducible polynomials over GF(2)

$i = 2^r w$（$\mathrm{ord}_2(i) = r$）のとき, $u^i - 1 = 0 \pmod 2$ は位数 w の根を持つことはよく知られている．もし $u^i - 1$ が $\hat{H}_d(z) \pmod 2$ の因数に現れれば, $w \in \{1,3,5\}$ に対して, $i = 2^r w$ とならなければならない．Table 2 の関係式から, d は Table 3 の様な形に限られることが分かる．

3.2 $H_d(z)$ modulo 3

$\hat{H}_d(z)$ modulo 3 においては, Table 5 に示されるように, a–d の場合がある．ここで, $\mathrm{ord}_3(c') = \mathrm{ord}_3(k') = m$ のとき, $c'' = c'/3^m$ と $k'' = k'/3^m$ している．

Cases	Conditions	$\hat{H}_d(z) \pmod 2$	d
a	$\mathrm{ord}_3(c') > \mathrm{ord}_3(k')$	$\pm P_{m,\epsilon}(z)$	$d = 3^r v$
b	$\mathrm{ord}_3(c') < \mathrm{ord}_3(k')$	$\pm P_{m-1,\epsilon}(z)$	$d-2 = 3^r v$
c	$\mathrm{ord}_3(c') = \mathrm{ord}_3(k')$, $c'' \equiv k'' \pmod 3$	$\pm(P_{m-1,\epsilon}(z) + P_{m,\epsilon}(z))$	$d-1 = 3^r v$
d	$\mathrm{ord}_3(c') = \mathrm{ord}_3(k')$, $c'' \equiv -k'' \pmod 3$	$\pm(P_{m-1,\epsilon}(z) - P_{m,\epsilon}(z))$	$2d-2 = 3^r v$

Table 5: $\hat{H}_d(z)$ modulo 3, $v \in \{1,2,4,5,8,10\}$

$\hat{H}_d(z)$ の根の最小多項式は高々2次であるから, $\hat{H}_d(z)$ は Table 6 に示される $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 上の既約多項式のみが因数として現れ得る. $i = 3^r v$ ($\mathrm{ord}_3(i) = r$) のとき, $u^i - 1 = 0 \pmod 3$ は位数 v の根を持つことはよく知られている. もし $u^i - 1$ が $\hat{H}_d(z) \pmod 3$ の因数に現れれば, $v \in \{1, 2, 4, 5, 8, 10\}$ に対して, $i = 2^r v$ とならなければならない. Table 2 の関係式から, d は Table 5 の様な形に限られることが分かる.

$f(z)$	$z = u + 1/u + 2$	order of u
$z - 1$	$(u-1)^2/u$	1
z	$(u+1)^2/u$	2
$z + 1$	$(u^2+1)/u$	4
$z^2 - z - 1$	$(u^2-u-1)(u^2+u+1)/u^2$	8
$z^2 + 1$	$(u^4+u^3+u^2+u+1)/u^2$	5
$z^2 + z - 1$	$(u^4-u^3+u^2-u+1)/u^2$	10

Table 6: Irreducible polynomials over GF(3)

3.3 直径の上界

A–C と a–d の全ての組合せに対して, 初等的な整数の議論を行うことで, 可能な d を有限個に絞ることが出来る. $d = 2$ の場合は, $g = 4$ となり, 完全二部グラフに限られるから, $d \geq 3$ とする. mod 3 における場合 d については, $d = 3^r v' + 1$, $v' \in \{1, 2, 4, 5\}$ であることに注意されたい.

(1) A-a の場合: $d = 2^r w = 3^s v$ と表せる. $r = 0$ のとき, $w \in \{1, 3, 5\}$, $v \in \{1, 2, 4, 5, 8, 10\}$ に注意すると, $w = 3^s v$ が満たされる (w, s, v, d) は, $(w, s, v, d) = (3, 1, 1, 3), (5, 0, 5, 5)$ に限られる. $r \geq 1$ のとき, v の取り得る値から $r \leq 3$ であることに注意すれば,

$$
\begin{aligned}
(r, w, s, v, d) =& (1, 3, 1, 2, 6), (1, 5, 0, 10, 10), (2, 1, 0, 4, 4),\\
& (2, 3, 1, 4, 12), (3, 1, 0, 8, 8), (3, 3, 1, 8, 24)
\end{aligned}
$$

に限られる. したがって, A-a の場合の可能な d の値は, $d = 3, 5, 6, 10, 4, 12, 8, 24$ に限られる.

(2) B-b の場合: $d = 2^r w + 2 = 3^s v + 2$ と表せる. $d = 3, 4$ と, A-a の場合の d に 2 を加えたものが可能な d である. つまり, $d = 3, 4, 5, 7, 8, 12, 6, 14, 10, 26$.

(3) C-c の場合: $d = 2^r w + 1 = 3^s v + 1$ と表せる. $d = 3$ と, A-a の場合の d に 1 を加えたものが可能な d である. つまり, $d = 3, 4, 6, 7, 11, 5, 13, 9, 25$.

(4) C-d の場合: $d = 2^r w + 1 = 3^s v' + 1$ と表せる. $d = 3$ と, A-a の場合の $v = 1, 2, 4, 5$ である d に 1 を加えたものが可能な d である. つまり, $d = 3, 4, 6, 7, 5, 13$.

(5) A-c の場合: $d = 2^r w = 3^s v + 1$ と表せる. 全ての w, v の組合せについて考えていく.

(5-1) $(w, v) = (1, 1)$ のとき, $d = 2^r = 3^s + 1$ となる. $r = 2m$ のとき, $2^{2m} - 1 = (2^m + 1)(2^m - 1) = 3^s$ となり, $2^m + 1 = 3^k$, $2^m - 1 = 3^l$ と表せる. $3^l(3^{k-l} - 1) = 3^k - 3^l = (2^m + 1) - (2^m - 1) = 2$ より, $l = 0$, $k = 1$ となり, $(r, s, d) = (2, 1, 4)$ となる. $r = 2m + 1$

のとき, $2^{2m+1}-1=\sum_{i=0}^{2m}2^i=3^s$. $s\geq 1$ のとき, $1\equiv\sum_{i=0}^{2m}2^i=3^s\equiv 0 \pmod 3$ となり, 矛盾. $s=0$ のとき, $d=2$ となる. したがって, $(w,v)=(1,1)$ のとき, $d=4$ に限られる..

(5-2) $(w,v)=(1,2),(1,4),(1,8),(1,10)$ のとき, $d=2^r=3^sv+1$ ($v\in\{2,4,8,10\}$) となる. $d\geq 3$ より, $r\geq 1$ であり, $0\equiv 2^r=3^sv+1\equiv 1 \pmod 2$ となるため, 矛盾. $(w,v)=(1,2),(1,4),(1,8),(1,10)$ のとき, 条件を満たす d は存在しない.

(5-3) $(w,v)=(1,5)$ のとき, $d=2^r=3^s\cdot 5+1$ となる. $r=2m$ のとき, $2^{2m}-1=(2^m+1)(2^m-1)=3^s\cdot 5$ となり, $2^m+1=3^k\cdot 5$, $2^m-1=3^l$, または $2^m+1=3^k$, $2^m-1=3^l\cdot 5$ と表せる. $2^m+1=3^k\cdot 5$, $2^m-1=3^l$ のとき, $3^k\cdot 5-3^l=(2^m+1)-(2^m-1)=2$ より, $(k,l)=(0,1)$ となり, $(r,s,d)=(4,1,16)$ を得る. $2^m+1=3^k$, $2^m-1=3^l\cdot 5$ のとき, $3^k-3^l\cdot 5=(2^m+1)-(2^m-1)=2$ を満たす (k,l) は存在しない. $r=2m+1$ のとき, $1\equiv\sum_{i=0}^{2m}2^i=3^s\cdot 5\equiv 0 \text{ or } 2 \pmod 3$, 矛盾. したがって, $(w,v)=(1,5)$ のとき, $d=16$ に限られる.

(5-4) $(w,v)=(3,v)$ のとき, $d=2^r\cdot 3=3^sv+1(v\in\{1,2,4,5,8,10\})$ となる. $s\geq 1$ のとき, $0\equiv 2^r\cdot 3=3^sv+1\equiv 1 \pmod 3$, 矛盾. $s=0$ のとき, $(v,r,d)=(2,0,3),(5,1,6)$ を得る. したがって, $(w,v)=(3,v)$ のとき, $d=3,6$ に限られる..

(5-5) $(w,v)=(5,1)$ のとき, $d=2^r\cdot 5=3^s+1$ となる. $0\equiv 2^r\cdot 5=3^s+1 \pmod 5$ より, $3^s\equiv -1 \pmod 5$. これより, $s=4t+2$ と表せる. $r=0$ のとき, 条件を満たす s は存在しない. $r=1$ のとき, $(s,d)=(2,10)$ を得る. $r\geq 2$ のとき, $0\equiv 2^r\cdot 5=3^{4t+2}+1\equiv(-1)^{4t+2}+1\equiv 2 \pmod 4$, 矛盾. したがって, $(w,v)=(5,1)$ のとき, $d=10$ に限られる..

(5-6) $(w,v)=(5,2),(5,4),(5,8)$ のとき, $d=2^r\cdot 5=3^s\cdot 2^i+1(i=1,2,3)$ となる. $r=0$ のとき, $(s,v,d)=(0,4,5)$ を得る. $r\geq 1$ のとき, $0\equiv 2^r\cdot 5=3^s\cdot 2^i+1\equiv 1 \pmod 2$, 矛盾. したがって, $(w,v)=(5,2),(5,4),(5,8)$ のとき, $d=5$ に限られる..

(5-7) $(w,v)=(5,5),(5,10)$ のとき, $d=2^r\cdot 5=3^s\cdot 2^i\cdot 5+1(i=0,1)$ となる. $0\equiv 2^r\cdot 5=3^s\cdot 2^i\cdot 5+1\equiv 1 \pmod 5$, 矛盾. $(w,v)=(5,5),(5,10)$ のとき, 条件を満たす d は存在しない.

以上, (5-1)–(5-7) より, A-c の場合の可能な d の値は, $d=4,16,3,6,10,5$ に限られる.

(6) C-b の場合: $d=2^rw+1=3^sv+2$ と表せる. $d=3$ と, A-c の場合の d に 1 を加えたものが可能な d である. つまり, $d=3,5,17,4,7,11,6$.

(7) A-d の場合: $d=2^rw=3^sv'+1$ と表せる. A-c の場合の $v=1,2,4,5$ のときに得られる d である. つまり, $d=4,16,3,6,10,5$.

(8) C-a の場合: $d=2^rw+1=3^sv$ と表せる. 全ての w, v の組合せについて考えていく.

(8-1) $v\in\{2,4,8,10\}$ とする. $r\geq 1$ のとき, $1\equiv 2^rw+1=3^sv\equiv 0$ となり, 矛盾. $r=0$ のとき, $(w,s,v,d)=(3,0,4,4),(5,1,2,6)$ を得る. したがって, $v\in\{2,4,8,10\}$ のとき, $d=4,6$ に限られる.

(8-2) $(w,v)=(1,1)$ のとき, $d=2^r+1=3^s$ となる. $s=2m$ のとき, $(3^m+1)(3^m-1)=2^r$ となり, $3^m+1=2^k$, $3^m-1=2^l$ と表せる. $2^l(2^{k-l}-1)=(3^m+1)-(3^m-1)=2$ であるから, $l=1$, $k=2$ となり, $(s,r,d)=(2,3,9)$ を得る. $s=2m+1$ のとき, $3^{2m+1}-1=2\sum_{i=0}^{2m}3^i=2^r$ と表せ, $r\geq 1$ である. $r=1$ のとき, $(s,d)=(1,3)$ を得る. $r\geq 2$ のとき, $2\equiv 2\sum_{i=0}^{2m}3^i=2^r\equiv 0 \pmod 4$ より, 矛盾. したがって, $(w,v)=(1,1)$ のとき, $d=9,3$ に限られる.

(8-3) $(w,v)=(3,1)$ のとき, $d=2^r\cdot 3+1=3^s$ となる. $d\geq 3$ より, $s\geq 1$ となり, $1\equiv 2^r\cdot 3+1=3^s\equiv 0 \pmod 3$, 矛盾. したがって, $(w,v)=(3,1)$ のとき, 条件を満たす d は存在しない.

(8-4) $(w,v)=(5,1)$ のとき, $d=2^r\cdot 5+1=3^s$ となる. $s=2m$ のとき, $(3^m+1)(3^m-1)=2^r\cdot 5$ と表せる. $3^m+1=2^k\cdot 5$ かつ $3^m-1=2^l$ のとき, $2^k\cdot 5-2^l=2$ より, $(k,l)=(1,3)$ となり, $(r,s,d)=(4,4,81)$ を得る. $3^m+1=2^k$ かつ $3^m-1=2^l\cdot 5$ のとき, $2^k-2^l\cdot 5=2$ より, これを満たす (k,l) は存在しない. $s=2m+1$ のとき, $3^{2m+1}-1=2\sum_{i=0}^{2m}3^i=2^r\cdot 5$ と表せる. $r=0,1$ のとき, 条件を満たす m は存在しない. $r\geq 2$ のとき, $2\equiv 2\sum_{i=0}^{2m}3^i=2^r\cdot 5\equiv 0 \pmod 4$ より, 矛盾. したがって, $(w,v)=(5,1)$ のとき, $d=81$ に限られる.

(8-5) $(w,v)=(1,5)$ のとき, $d=2^r+1=3^s\cdot 5$ となる. $2^r\equiv -1 \pmod 5$ であり, $r\equiv 2 \pmod 4$ を得る. $r=2$ のとき, $(s,d)=(0,5)$ を得る. $r=4t+2 (t\geq 1)$ とおく. $3^s\cdot 5=2^{4t+2}+1=4\cdot 16^t+1\equiv 1 \pmod{16}$ より, $3^s\equiv 13 \pmod{16}$. $3^s\equiv 1,3,9,11 \pmod{16}$ であることに注意すれば, 条件を満たす s は存在しない. したがって, $(w,v)=(1,5)$ のとき, $d=5$ に限られる.

(8-6) $(w,v)=(3,5)$ のとき, $d=2^r\cdot 3+1=3^s\cdot 5$ となる. $s=0$ のとき, 条件を満たす r は存在しない. $s\geq 1$ のとき, $1\equiv 2^r\cdot 3+1=3^s\cdot 5\equiv 0 \pmod 3$ となり, 矛盾. したがって, $(w,v)=(3,5)$ のとき, 条件を満たす d は存在しない.

(8-6) $(w,v)=(5,5)$ のとき, $d=2^r\cdot 5+1=3^s\cdot 5$ となる. $1\equiv 2^r\cdot 5+1=3^s\cdot 5\equiv 0 \pmod 5$ となり, 矛盾. したがって, $(w,v)=(5,5)$ のとき, 条件を満たす d は存在しない.

以上, (8-1)–(8-6) より, C-a の場合の可能な d の値は, $d=4,6,9,3,81,5$ に限られる.

(9) B-c の場合: $d=2^rw+2=3^sv+1$ と表せる. $d=3$ と, C-a の場合の d に 1 を加えたものが可能な d である. つまり, $d=3,5,7,10,4,82,6$.

(10) B-d の場合: $d=2^rw+2=3^sv'+1$ と表せる. $d=3$ と, C-a の場合の $v=1,2,4,5$ である d に 1 を加えたものが可能な d である. つまり, $d=3,5,7,10,4,82,6$.

(11) A-b の場合: $d=2^rw=3^sv+2$ と表せる. 全ての w, v の組合せについて考えていく.

(11-1) $v\in\{1,5\}$ とする. $r\geq 1$ ならば, $0\equiv 2^rw=3^sv+2\equiv 1 \pmod 2$ となり, 矛盾. $r=0$ のとき, $d=w=3^sv+2$ となり, $(w,s,v,d)=(3,0,1,3),(5,1,1,5)$ を得る. したがって, $v\in\{1,5\}$ のとき, $d=3,5$ に限られる.

(11-2) $v\in\{4,8\}$ とする. $r\geq 2$ ならば, $0\equiv 2^{r-1}w=3^sv/2+1\equiv 1 \pmod 2$ となり, 矛盾. $r=0$ のとき, $d=w=3^sv+2$ となり, 条件を満たす d は存在しない. $r=1$ のとき, $d=2w=3^sv+2$ となり, $(w,s,v,d)=(3,0,4,6),(5,0,8,10)$ を得る. したがって, $v\in\{4,8\}$ のとき, $d=6,10$ に限られる.

(11-3) $v\in\{2,10\}$ とする. $r\geq 1$ のとき, $d/2=2^{r-1}w=3^s(v/2)+1$ となり, $d/2\geq 3$ のとき, これを満たす整数は, A-c の場合の $v=1,5$ のときにすでに考察されている. よって, $(r,w,s,v,d)=(3,1,1,2,8),(5,1,1,10,32),(2,3,0,10,12),(2,5,2,2,20)$ を得る. また, $(r,w,s,v)=(2,1,0,2)$ とすれば, $d=4$ を得る. $r=0$ のとき, 条件を満たす d は存在しない. したがって, $v\in\{2,10\}$ のとき, $d=8,32,12,20,4$ に限られる.

以上, (11-1)–(11-3) より, A-b の場合の可能な d の値は, $d=3,5,6,10,8,32,12,20,4$ に限られる.

(12) B-a の場合: $d=2^rw+2=3^sv$ と表せる. 全ての w, v の組合せについて考えていく.

(12-1) $v\in\{1,5\}$ とする. $r\geq 1$ ならば, $0\equiv 2^rw+2=3^sv\equiv 1 \pmod 2$ となり, 矛盾. $r=0$ のとき, $d=w+2=3^sv$ となり, $(w,s,v,d)=(1,1,1,3),(3,0,5,5)$ を得る. したがって, $v\in\{1,5\}$ のとき, $d=3,5$ に限られる.

(12-2) $v \in \{4, 8\}$ とする．$r \geq 2$ ならば，$2 \equiv 2^r w + 2 = 3^s v \equiv 0 \pmod 2$ となり，矛盾．$r = 0$ のとき，$d = w + 2 = 3^s v$ となり，条件を満たす d は存在しない．$r = 1$ のとき，$d = 2w + 2 = 3^s v$ となり，$(w, s, v, d) = (1, 0, 4, 4), (3, 0, 8, 8), (5, 1, 4, 12)$ を得る．したがって，$v \in \{4, 8\}$ のとき，$d = 4, 8, 12$ に限られる．

(12-3) $v \in \{2, 10\}$ とする．$r \geq 1$ のとき，$d/2 = 2^{r-1} w + 1 = 3^s (v/2)$ となり，$d/2 \geq 3$ のとき，これを満たす整数は，C-a の場合の $v = 1, 5$ のときにすでに考察されている．よって，$(r, w, s, v, d) = (4, 1, 2, 2, 18), (2, 1, 1, 2, 6), (5, 5, 4, 2, 162), (3, 1, 0, 10, 10)$ を得る．$r \geq 1$ のとき，$d = 4$ となる (r, w, s, v, d) は存在しない．$r = 0$ のとき，条件を満たす d は存在しない．したがって，$v \in \{2, 10\}$ のとき，$d = 18, 6, 162, 10$ に限られる．

以上，(12-1)–(12-3) より，B-a の場合の可能な d の値は，$d = 3, 5, 4, 8, 12, 18, 6, 162, 10$ に限られる．

Table 7 に得られた d の値をまとめる．

Case (mod 2)	Case (mod 3)	Possible values of d
A	a	3–6,8,10,12,24
	b	3–6,8,10,12,20,32
	c,d	3–6,10,16
B	a	3–6,8,10,12,18,162
	b	3–8,10,12,14,26
	c,d	3–7,10,82
C	a	3–6,9,81
	b	3–7,11,17
	c	3–7,9,11,13,25
	d	3–7,13

Table 7: Possible values of d

$d = 18, 81, 82, 162$ については，任意の $c', k' \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ に対して，$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ 上の多項式 $c' P_{m-1,\epsilon}(z) + k' P_{m,\epsilon}(z)$ は次数 3 以上の既約多項式を因数として持つことが，コンピューターを用いれば，確かめることができる．$d = 20, 32$ については，任意の $c', k' \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ に対して，$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ 上の多項式 $c' P_{m-1,\epsilon}(z) + k' P_{m,\epsilon}(z)$ は次数 3 以上の既約多項式を因数として持つ．$d = 17$ については，任意の $c', k' \in \mathbb{Z}/43\mathbb{Z}$ に対して，$\mathbb{Z}/43\mathbb{Z}$ 上の多項式 $c' P_{m-1,\epsilon}(z) + k' P_{m,\epsilon}(z)$ は次数 3 以上の既約多項式を因数として持つ．したがって，$d = 3$–$14, 16, 24, 25, 26$ に限ることが分かった．

Theorem 3.1. *k を 3 以上の整数とし，c を $1 \leq c \leq k-1$ 満たす整数とする．そのとき，$d > 26$ において，$\boldsymbol{B}(k, d+1, c)$ を交叉行列に持つ距離正則グラフ Γ は存在しない．*

先行研究である [5] においては，$\boldsymbol{T}(k, t, c)$ を交叉行列に持つ距離正則グラフの直径上界は最善なものであったが，今回の直径の上界については，改善の余地がある．そのためには，$\boldsymbol{B}(k, d+1, c)$ の固有値 θ に対して，θ^2 の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式が 1 次であること，つまり θ^2 が有理数であることを示す必要がある．

References

[1] A. Abiad, E.R. van Dam, and M.A. Fiol, Some spectral and quasi-spectral characterizations of distance-regular graphs, *J. Combin. Theory Ser. A* **143** (2016), 1–18.

[2] N. Alon and V.D. Milman, λ_1, isoperimetric inequalities for graphs, and superconcentrators, *J. Combin. Theory Ser. B* **38**(1985), 73–88.

[3] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic Combinatorics I: Association Schemes*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, CA, 1984.

[4] S.M. Cioabă, J.H. Koolen, H. Nozaki, and J.R. Vermette, Maximizing the order of a regular graph of given valency and second eigenvalue, *SIAM J. Discrete Math.* **30** (2016), no. 3, 1509–1525.

[5] R.M. Damerell and M.A. Georgiacodis, On the maximum diameter of a class of distance-regular graphs. Bull. London Math. Soc. **13**, 316–322 (1981).

[6] F.J. Fuglister, On generalized Moore geometries. I, *Discrete Math.* **67** (1987), no. 3, 249–258.

[7] H. Nozaki, Linear programming bounds for regular graphs, *Graphs Combin.* **31** (2015), no. 6, 1973–1984.

Hiroshi Nozaki
Department of Mathematics Education,
Aichi University of Education
1 Hirosawa, Igaya-cho,
Kariya, Aichi 448-8542,
Japan.
hnozaki@auecc.aichi-edu.ac.jp